Modulprüfung WS 2021-2022

Teil 2: Stahl- und Verbundtragwerke

Prüfungszeit 120 Minuten

Prof. Dr.-Ing. habil. Marcus Rutner

Institut für Metall- und Verbundbau

Hamburg, den 24. Februar 2022

Name: ____

Vorname: ____

Matrikelnummer: ____

Berechnungsnorm: **DIN EN 1994**

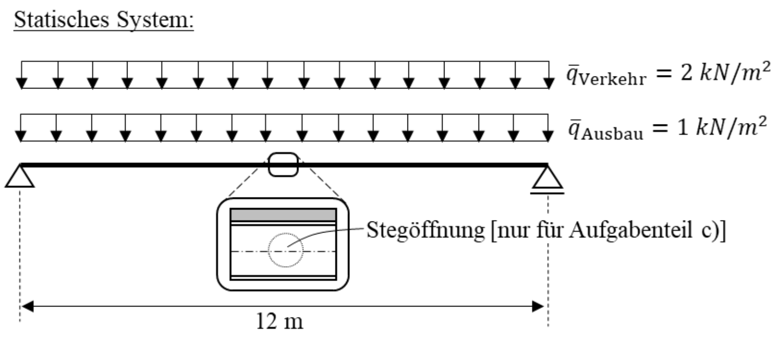
Aufgabe	**Maximale Punktzahl**	**Erreichte Punktzahl**
1)	**75**	
2)	**45**	
Summe	**120**	
		Note:

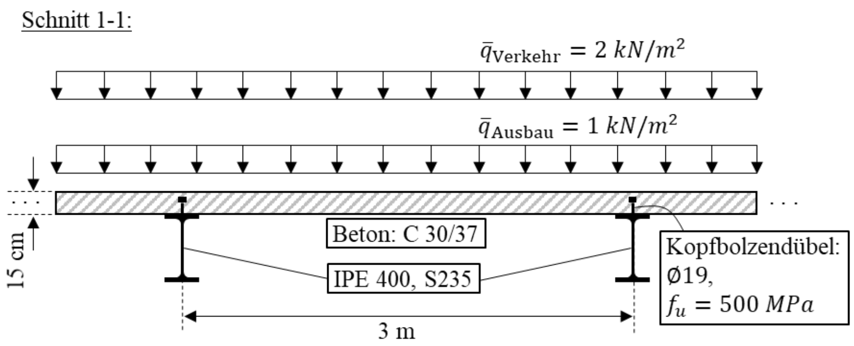
Bearbeitungshinweise:

- Alle Blätter sind mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Es dürfen keine grünen Farbstifte verwendet werden.
- Lösungen sind so darzustellen, dass der Lösungsweg lückenlos nachvollziehbar ist.
- Hilfsmittel sind zugelassen, jedoch keine elektronischen Geräte außer dem Taschenrechner.
- Das Mitführen von Kommunikationsmitteln ist untersagt.

Aufgabe 1:

Gegeben ist das unten dargestellte statische System. Die Stahlträger stehen im Verbund mit der darauf liegenden Betonplatte und spannen als Einfeldträger über 12 m. Biegedrillknicken wird mit konstruktiven Maßnahmen ausgeschlossen.





a) Zeigen Sie, dass der Nachweis auf Biegung unter Annahme einer Vollverdübelung erfüllt ist.
b) Wählen Sie die Anzahl und Anordnung der Kopfbolzendübel für eine Vollverdübelung.
c) Im Laufe der Planung wird beim Stahlträger eine kreisrunde Stegöffnung in Feldmitte erforderlich; das Zentrum des Kreises soll auf der Schwerachse des Stahlträgers liegen. Wie groß darf der Durchmesser dieser Öffnung maximal werden, damit der Biegenachweis noch erfüllt bleibt?
d) Es stellt sich heraus, dass der maximal zulässige Öffnungsdurchmesser knapp nicht ausreichend ist. Daraufhin wird vorgeschlagen, die Stegöffnung statt in Feldmitte in der Nähe eines der Auflager anzuordnen, mit der Begründung, dass das Moment dort sehr klein ist. Kann man diesen Vorschlag ohne Weiteres akzeptieren? Begründen Sie Ihre Antwort.
e) Mit welcher Überhöhung sollen die Träger hergestellt werden, damit sich zum Zeitpunkt $t = \infty$ die „Gradiente Null" (d.h. eine Nettodurchbiegung von Null) ergibt? Der ständige Anteil der Verkehrslast ist mit 60 % anzusetzen. Folgendes ist noch zu beachten: Die Stahlträger werden während des Betonierens nicht über ihre Länge unterstützt, so dass sie das Eigengewicht des Betons bis zu dessen Erhärtung (also bis zur Entstehung des Verbundquerschnitts) tragen müssen.

Aufgabe 2:

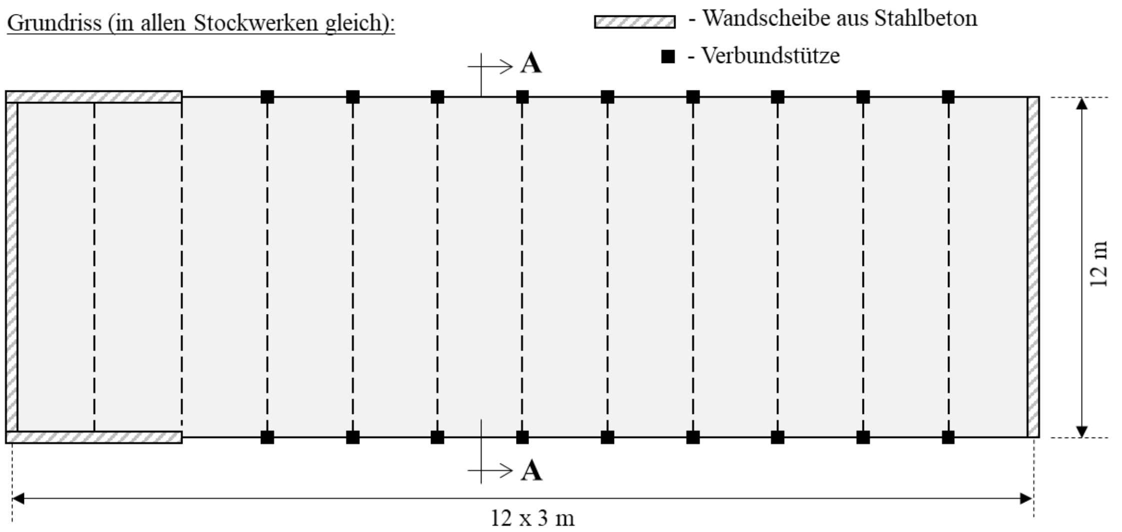
Das Verbundsystem in Aufgabe 1 stellt eine der baugleichen und gleichbelasteten Geschossebenen eines mehrstöckigen Gebäudes dar. Grundriss und Schnitt dieses Gebäudes sind unten dargestellt.

a) Zeichnen Sie qualitativ die Stützenknickfigur über die gesamte Gebäudehöhe in die Skizze für Schnitt A-A ein.

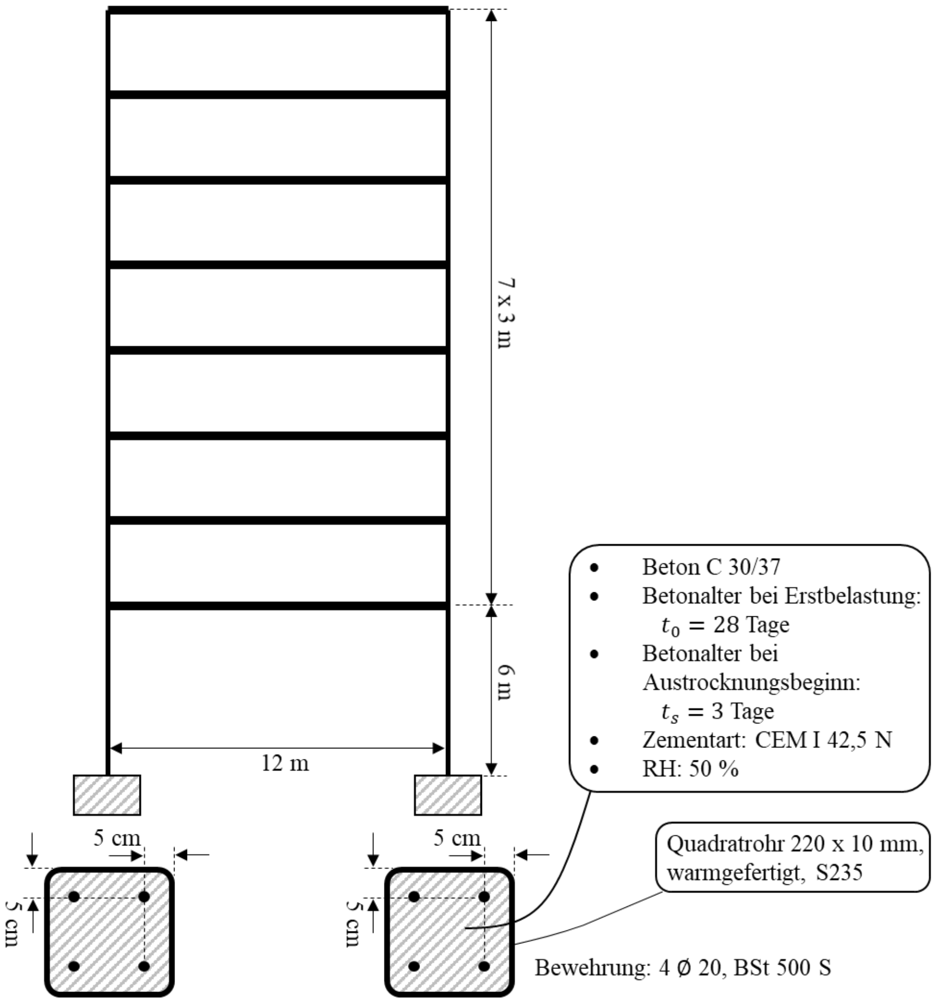
b) Führen Sie den Tragfähigkeitsnachweis einer Verbundstütze im Erdgeschoss für den Zeitpunkt $t \to \infty$.

Hinweis:

- *Die Stützenfüße können als fest eingespannt betrachtet werden.*
- *Bei der Berechnung der Betonquerschnittswerte dürfen die Ausrundungen an den Ecken des Stahlquadratrohrs vernachlässigt werden.*
- *Nicht gegebene Informationen sind, soweit für die Bearbeitung erforderlich, sinnvoll anzunehmen.*



Schnitt A-A:


7 x 3 m
6 m
12 m
5 cm
5 cm
5 cm
5 cm
Beton C 30/37
Betonalter bei Erstbelastung: $t_0 = 28$ Tage
Betonalter bei Austrocknungsbeginn: $t_s = 3$ Tage
Zementart: CEM I 42,5 N
RH: 50 %
Quadratrohr 220 x 10 mm, warmgefertigt, S235
Bewehrung: 4 Ø 20, BSt 500 S

MUSTERLÖSUNG Stahl- und Verbundtragwerke WS 21-22, Teil II

Aufgabe 1

a)

- Mitwirkende Breite

  $$b_{eff} = min\begin{cases} 2 \cdot {}^{12}/_{8} = 3m \\ 3m \end{cases} \rightarrow b_{eff} = 3m$$

- Vollplastisches Moment

  $$N_{pl,a} = 23{,}5 \cdot 84{,}5 = 1986kN$$

  $$N_{pl,c} = 0{,}85 \cdot \frac{3}{1{,}5} \cdot 300 \cdot 15 = 7650kN$$

  → PNA liegt im Beton

  $$z_{pl} \cdot f_{cd} \cdot b_{eff} = N_{pl,a} \rightarrow z_{pl} = \frac{N_{pl,a}}{f_{cd} \cdot b_{eff}} = \frac{1986}{1{,}7 \cdot 300} = 3{,}9cm$$

  $$M_{pl,Rd} = N_{pl,a} \cdot \left(\frac{h_a}{2} + h_c - \frac{z_{pl}}{2}\right) = \frac{1986}{100} \cdot \left(\frac{40}{2} + 15 - \frac{3{,}9}{2}\right) = 656kNm$$

- Bestimmen der Einwirkungen und Nachweis

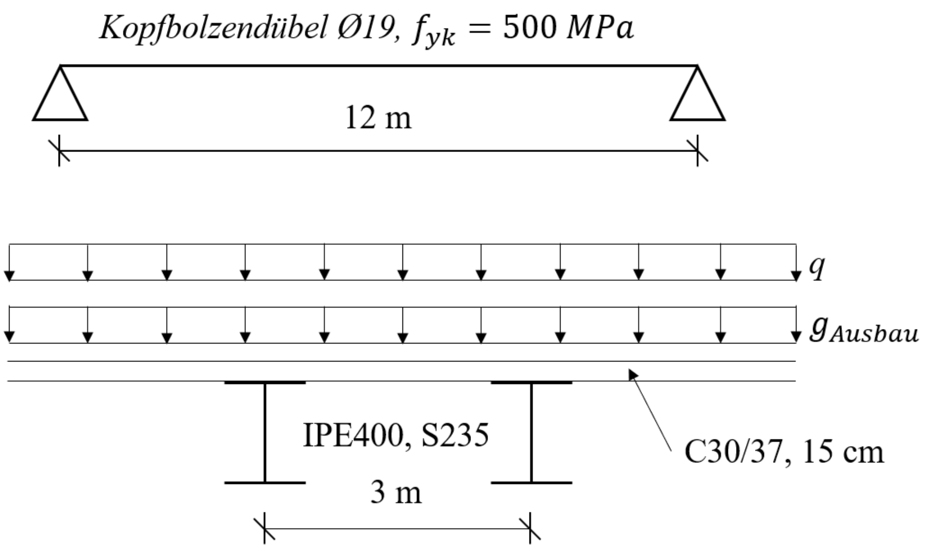
  $$g_d = 1{,}35 \cdot \left(1\frac{kN}{m^2} \cdot 3m + 0{,}15m \cdot 25\frac{kN}{m^3} \cdot 3m + 0{,}66\frac{kN}{m}\right)$$

  $$= 1{,}35 \cdot (3 + 11{,}25 + 0{,}66) = 20{,}13\frac{kN}{m}$$

  $$q_d = 1{,}5 \cdot 2\frac{kN}{m^2} \cdot 3m = 9\frac{kN}{m}$$

  $$M_{Ed} = \frac{(g_d + q_d) \cdot L^2}{8} = \frac{29{,}13 \cdot 12^2}{8} = 524kNm$$

  $$M_{Ed} < M_{pl,Rd} \checkmark$$



b)

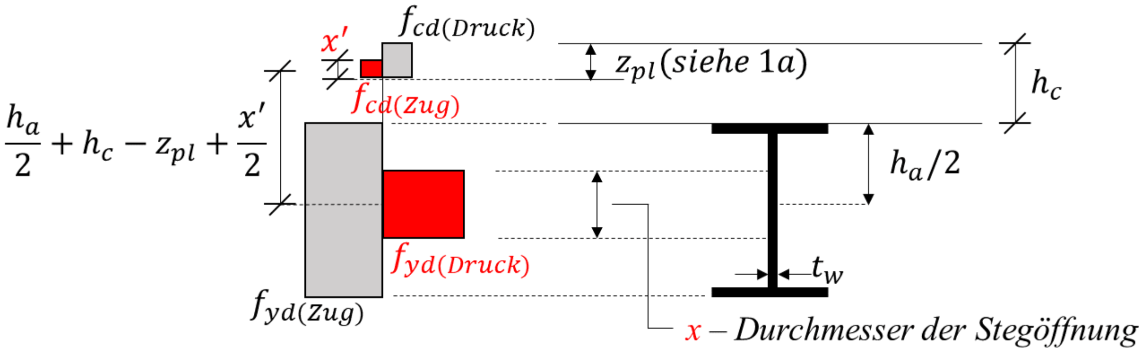
- Erforderliche Kopfbolzendübel für eine Vollverdübelung, für den Fall ohne Stegöffnung
  $P_{Rd} = 69{,}4kN$
  $$erf.n\ pro\ Trägerhälfte = \frac{N_{pl,a}}{P_{Rd}} = \frac{1986}{69{,}4} = 28{,}6$$
  → gewählt: $n = 30$
  $$e = \frac{600}{30} = 20cm \begin{cases} > 5 \cdot d = 5 \cdot 1{,}9 = 9{,}5cm \checkmark \\ < 80cm \checkmark \\ < 6 \cdot h_c = 6 \cdot 15 = 90cm \checkmark \end{cases}$$

c)

- Momentenreserve in Feldmitte
  $M_{Res} = M_{pl,Rd} - M_{Ed} = 656 - 524 = 132kNm$
  →Die größtmögliche Stegöffnung ist so groß, dass die Momentenreserve gerade aufgebraucht wird. Mit anderen Worten: Die roten Spannungsblöcke in der Skizze auf der nächsten Seite können so groß werden, dass das Moment ihrer Resultierenden gleich M_{Res} wird. Das liefert die unten angegebene Bestimmungsgleichung für x. Des Weiteren ist zu beachten, dass x' abhängig von x ist, da Folgendes erfüllt sein muss (s. Skizze auf der nächsten Seite):
  $$x' \cdot b_{eff} \cdot f_{cd} = x \cdot t_w \cdot f_{yd} \rightarrow x' = x \cdot \frac{t_w \cdot f_{yd}}{b_{eff} \cdot f_{cd}} \qquad (1)$$

- Bestimmungsgleichung für x:
  $$x \cdot t_w \cdot f_{yd} \cdot \left[\frac{h_a}{2} + h_c - z_{pl} + \frac{x'}{2}\right] = M_{Res}$$
  mit: $\frac{x'}{2} = x_0 \cdot \frac{t_w \cdot f_{yd}}{b_{eff} \cdot f_{cd} \cdot 2}$ (aus Gl. 1)
  Einsetzen der Werte (Kräfte in kN und Längen in cm):
  $$x \cdot 20{,}2 \cdot [31{,}1 + x \cdot 0{,}02] = 13200kNcm$$
  Umformen und Auflösen:
  $$0{,}4 \cdot x^2 + 628{,}2 \cdot x - 13200 = 0$$
  $$x_{1,2} = \frac{-628 \pm \sqrt{628{,}2^2 + 4 \cdot 0{,}4 \cdot 13200}}{2 \cdot 0{,}4} \rightarrow x_1 = 20{,}7cm$$
  x_2 ist negativ und hat daher keine physikalische Bedeutung.
  Die größte zulässige Stegöffnung hat einen Durchmesser von 20,7 cm.

  Zusatzbemerkung:
  Der quadratische Term in der Bestimmungsgleichung für x ist sehr klein. Wenn man diesen Term vernachlässigt (d.h. wenn man $\frac{x'}{2}$ beim Hebelarm vernachlässigt), bekommt man $x = \frac{13200}{628{,}2} = 21cm$, was sich nur geringfügig von der obigen exakten Lösung unterscheidet.



Die grauen Spannungsblöcke gelten für die Situation ohne Stegöffnung. Der Einfluss der Stegöffnung ist durch die roten Spannungsanteile repräsentiert. Da die Stegöffnung die Tragfähigkeit abmindert, sind die roten Spannungsanteile mit jeweils entgegengetzten Vorzeichen eingetragen. Das Gesamtmoment der Resultierenden der grauen und roten Spannungsblöcke ist das vollplastische Moment des Querschnitts mit Stegöffnung.

e)

- Relevante Größen

  $E_{cm} = 3300 \frac{kN}{cm^2}$
- Endkriechzahl: $h_0 = h = 15cm$

  $\varphi(\infty, t_0 = 28\,Tage) = 2{,}63 - (2{,}63 - 2{,}06) \cdot \frac{15 - 10}{50 - 15} = 2{,}6$
- Endschwindmaß: $h_0 = h = 15cm$

  $\varepsilon_{cs}(\infty, t_\infty = 3\,Tage) = 0{,}47 \cdot 10^{-3}$
- Biegesteifigkeiten EI_0, EI_p, EI_s

  $E_0 = \frac{E_{cm}}{1{,}0} = 3300 \frac{kN}{cm^2}$

  $A_a = 84{,}5cm^2, E_a = 21000 \frac{kN}{cm^2}, I_a = 23130cm^4$

  $A_c = 300 \cdot 15 = 4500cm^2, I_c = \frac{300 \cdot 15^3}{12} = 84375cm^2$

  $a = \frac{15}{2} + \frac{40}{2} = 27{,}5cm$

  $E_p = \frac{E_{cm}}{n_c} = \frac{3300}{1 + 1{,}1 \cdot 2{,}6} = 855 \frac{kN}{cm^2}$

  $E_s = \frac{E_{cm}}{n_c} = \frac{3300}{1 + 0{,}55 \cdot 2{,}6} = 1358 \frac{kN}{cm^2}$

  $$EI_o = 10^{-4} \cdot \left(21000 \cdot 23130 + 3300 \cdot 84375 \cdot \frac{21000 \cdot 84{,}5 \cdot 3300 \cdot 4500}{21000 \cdot 84{,}5 + 3300 \cdot 4500} \cdot 27{,}5\right)$$
  $$= 1{,}96 \cdot 10^5\ kNm^2$$

$$EI_p = 10^{-4} \cdot \left(21000 \cdot 23130 + 855 \cdot 84375 \cdot \frac{21000 \cdot 84{,}5 \cdot 855 \cdot 4500}{21000 \cdot 84{,}5 + 855 \cdot 4500} \cdot 27{,}5\right)$$
$$= 1{,}48 \cdot 10^5 \; kNm^2$$
$$EI_s = 10^{-4} \cdot \left(21000 \cdot 23130 + 1358 \cdot 84375 \cdot \frac{21000 \cdot 84{,}5 \cdot 1358 \cdot 4500}{21000 \cdot 84{,}5 + 1358 \cdot 4500} \cdot 27{,}5\right)$$
$$= 1{,}64 \cdot 10^5 \; kNm^2$$

- Beanspruchung aus Schwinden

  $$N_{cs} = E_{cs} \cdot A_c \cdot E_s = 0{,}47 \cdot 10^{-3} \cdot 4500 \cdot 1358 = 2872kN$$
  $$a_{c,s} = \frac{E_a \cdot A_a}{E_a \cdot A_a + E_s \cdot A_c} \cdot a = 6{,}2cm$$
  $$M_{cs} = N_{cs} \cdot a_{c,s} = 178kN$$
- Berechnung der Durchbiegungsanteile
  - Durchbiegung des Stahlträgers unter seinem Eigengewicht und dem Eigengewicht des Frischbetons:

    $$f_{Stahlträger}^{B+S} = \frac{5}{384} \cdot \frac{1}{E_a I_a} \cdot \left(0{,}66 \frac{kN}{m} + 11{,}25 \frac{kN}{m}\right) \cdot L^4$$
    $$= \frac{5}{384} \cdot \frac{1}{21000 \cdot 23130 \cdot 10^{-4}} \cdot 11{,}91 \cdot 12^4 = 0{,}066m$$
    $$= 6{,}6cm$$
  - Durchbiegung zum $t = \infty$ infolge Ausbaulast und ständigem Anteil der Verkehrslast (wird zu *60%* angenommen – Vorgabe in der Aufgabenstellung):

    $$f_{\infty}^{Ausbau+Verkehr} = \frac{5}{384}(3 + 6 \cdot 0{,}6) \cdot 12^4 \cdot \frac{1}{1{,}48 \cdot 10^5} \cdot 10^2 = 1{,}2cm$$
  - Durchbiegung aus Schwinden zum $t = \infty$:

    $$f_{Schwind} = \frac{M_{cs} \cdot L^2}{8EI_s} = \frac{178 \cdot 12^2}{8 \cdot 1{,}64 \cdot 10^5} \cdot 10^2 = 1{,}95cm$$
  - Gesamtdurchbiegung zum $t = \infty$:

    $$f_{ges} = f_{Stahlträger}^{B+S} + f_{\infty}^{Ausbau+Verkehr} + f_{Schwind} = 6{,}6 + 1{,}2 + 1{,}95$$
    $$= 9{,}75cm$$

    Die Überhöhung muss zu *9,75cm* gewählt werden, um die „Gradiente Null" zum $t = \infty$ zu erreichen.

Aufgabe 2

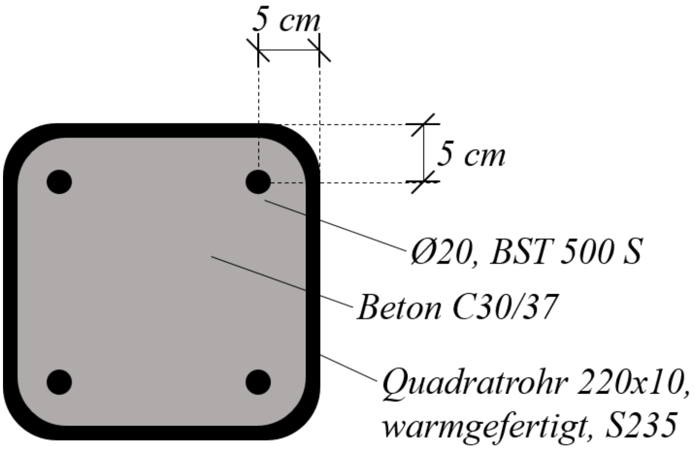
M-N Interaktionsdiagramm:

- Punkt A: $M = 0$

$$N_{pl,Rd} = \frac{A_a \cdot f_{yd}}{\gamma_{M1}} + A_s \cdot f_{sd} + A_c \cdot f_{cd}$$
$$= \frac{82{,}9 \cdot 23{,}5}{1{,}1} + 4 \cdot \pi \cdot \frac{50}{1{,}15} + (20^2 - 4 \cdot \pi)\frac{3}{1{,}5} \cdot 1{,}0$$
$$= 1171 + 419 + 775 = 2965 kN$$

1,0 da Beton voll umschlossen – kein Punktabzug, wenn statt *1,0* mit *0,85* gerechnet wurde
Bei der Berechnung der Betonquerschnitte werden die Ausrundungen an den Ecken des Stahlrohrs vernachlässigt – Hinweis in der Aufgabenstellung

$$\frac{N_{pl,A}}{N_{pl,Rd}} = \frac{1771}{2965} = 0{,}6 \begin{cases} > 0{,}2 \checkmark \\ < 0{,}9 \checkmark \end{cases}$$



- Punkt D: $N_a = N_s = 0$

$$M_a = M_{pl,a} = W_{pl,A} \cdot f_{yd} = 650 \cdot \frac{21{,}36}{100} = 139 kNm$$

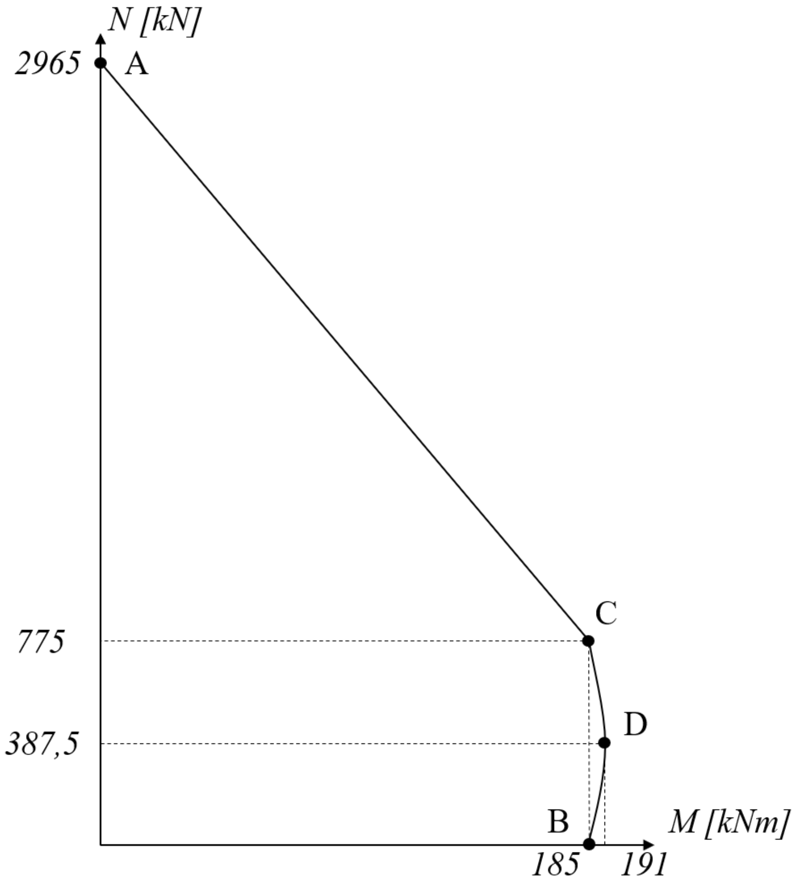
$$M_s = 2 \cdot \pi \cdot (22 - 2{,}5) \cdot \frac{435}{100} = 33 kNm$$

$$N_c = \frac{N_{c,Rd}}{2} = 387{,}5 kNm$$

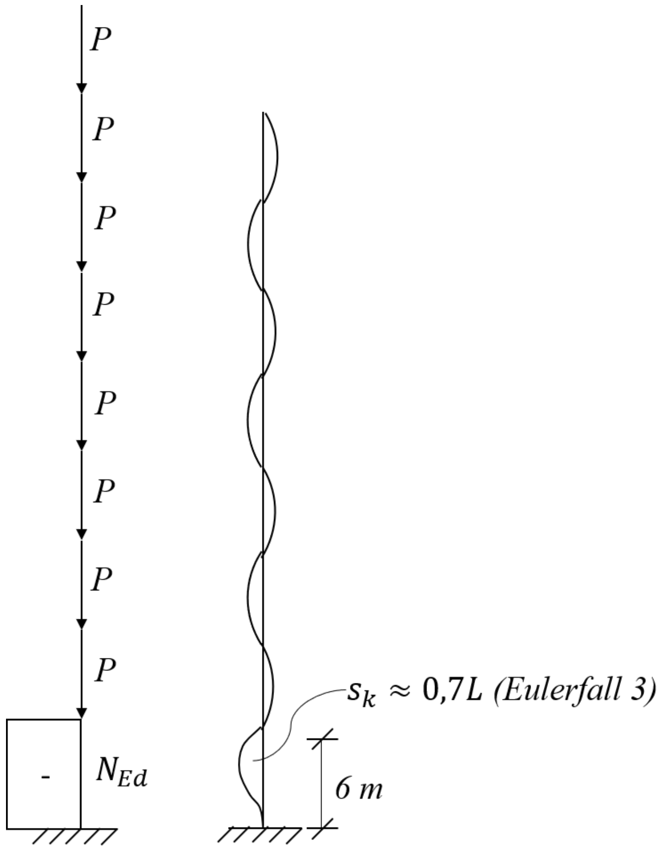
$$M_c = W_{pl,c} \cdot \frac{f_{cd}}{2} = \left(\frac{20^3}{4} - 75{,}4\right)\frac{2\frac{kN}{cm^2}}{2}/100 = 19 kNm$$

$$N_D = N_A + N_S + N_C = 387{,}5 kN = {}^{N_{c,Rd}}/_{2}$$
$$M_D = M_A + M_S + M_C = M_{max,Rd} = 191 kNm$$

- Punkt B: $N_B = 0$
  Berechnung von x_0: Annahme – PNA im Steg
  $$x_0 = \frac{N_{c,Rd}/2}{2 \cdot t_w \cdot f_{yd} + b_c \cdot f_{cd}} = \frac{387{,}5}{2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 21{,}36 + 20 \cdot 2} = 3{,}1cm < \frac{20cm}{2}$$
  Annahme OK
  $$M_o = x_0^2 \cdot t_w \cdot f_{yd} + x_0^2 \cdot b_c \cdot \frac{f_{cd}}{2} = \left(3{,}1^2 \cdot (2 \cdot 1) \cdot 21{,}36 + 3{,}1^2 \cdot 20 \cdot {}^2/_2\right)/100$$
  $$= 6kNm$$
  $$M_B = M_D - M_0 = 191 - 6 = 185kNm = M_{pl,Rd}$$
- Punkt C:
  $$M_c = M_{pl,Rd} = 185kNm$$
  $$N_c = N_{c,Rd} = 775kN$$



- Biegesteifigkeit
  $E_{cm} = 3300 \frac{kN}{cm^2}$ (C30/37)
  $\varphi(\infty, t = 28\,Tage) = 2{,}63$
  φ darf mit dem Faktor *0,25* abgemindert werden, da der Beton voll umschlossen ist. Hier wird auf der sicheren Seite mit $\varphi = 2{,}63$ ohne Abminderung gerechnet.
  $$E_{c,eff} = E_{cm} \frac{1}{1 + \frac{N_{G,Ed}}{N_{Ed}} \cdot \varphi} = \frac{3300}{1 + \frac{1013}{1445} \cdot 2{,}63} = 1160kN$$
  $$(EI)_{eff,y,II} = 0{,}9 \cdot \left(E_a I_a + E_s I_s + 0{,}5 E_{c,eff} I_c\right)$$
  $$= 0{,}9 \cdot (21000 \cdot 6050 \cdot 20000 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 6^2 + 0{,}5 \cdot 1160 \cdot \left(\frac{20^4}{12} - 452\right)$$
  $$= 1{,}29 \cdot 10^8 kNcm^2$$
- Für die Stütze im Erdgeschoss gilt:
  $N_{Ed} = 8 \cdot P + 7{,}3m \cdot q_{Stütze} \cdot 1{,}35$
  $$N_{Ed} = 8 \cdot \left(20{,}13 \frac{kN}{m} \cdot 6m \cdot 9 \frac{kN}{m} \cdot 6m\right) + 7{,}3m \cdot \left(0{,}65 \frac{kN}{m} + 0{,}2^2 \cdot 25\right) \cdot 1{,}35$$
  $$= 1013 + 432 = 1445kN$$



- Vorkrümmung:

$$w_o = \frac{s_k}{200} = \frac{0{,}7 \cdot 600cm}{200} = 2{,}1cm$$

$$M_{Ed}^{I} = N_{Ed} \cdot w_o = 1445 \cdot 0{,}021m = 30{,}3kNm$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot (EI)_{eff,y,II}}{{s_k}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 1{,}29 \cdot 10^8 kNcm^2}{(0{,}7 \cdot 600cm)^2} = 7218kN$$

$$\rightarrow \eta_{ki} = \frac{N_{cr}}{N_{Ed}} = \frac{7218}{1445} = 4{,}9$$

$$M_{Ed}^{II} = M_{Ed}^{I} \cdot \frac{1}{1 - {}^{1}/_{\eta_{ki}}} = 30{,}3 \cdot \frac{1}{1 - {}^{1}/_{4{,}9}} = 38kN$$

$$M_{pl,N,Rd} = \left(1 - \frac{N_{Ed} - N_{c,Rd}}{N_{pl,Rd} - N_{c,Rd}}\right) \cdot M_{pl,Rd} = \left(1 - \frac{670}{2190}\right) \cdot 185 = 128kNm$$

Nachweis:

$$M_{Ed}^{II} / (\alpha_m M_{pl,N,Rd}) = 38 / (0{,}9 \cdot 128) = 0{,}33 < 1 \checkmark$$