

Modulprüfung WS 2020-2021

Teil 2: Stahl- und Verbundtragwerke

Prüfungszeit 120 Minuten

Prof. Dr.-Ing. habil. Marcus Rutner

Institut für Metall- und Verbundbau

Hamburg, den 25. Februar 2021

Name: _____

Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

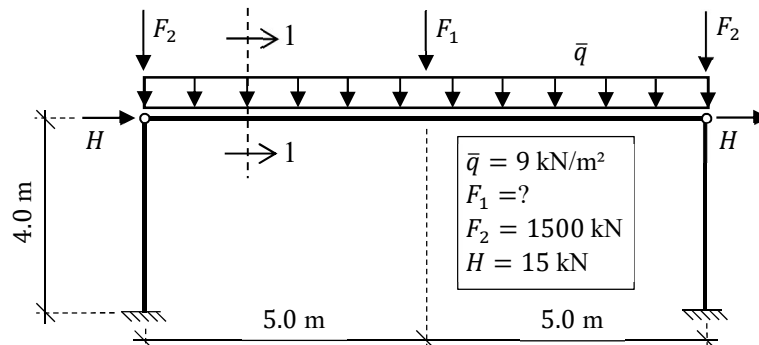
Berechnungsnorm: **DIN EN 1994**

Aufgabe	Maximale Punktzahl	Erreichte Punktzahl
1)	80	
2)	40	
Summe	120	
		Note:

Bearbeitungshinweise:

- Alle Blätter sind mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Es dürfen keine grünen Farbstifte verwendet werden.
- Lösungen sind so darzustellen, dass der Lösungsweg lückenlos nachvollziehbar ist.
- Hilfsmittel sind zugelassen, jedoch keine elektronischen Geräte außer dem Taschenrechner.
- Das Mitführen von Kommunikationsmitteln ist untersagt.

Statisches System:



Verbundstützen:

Beton: C 30/37

Bewehrung: 4 \varnothing 20, Bst 500 S

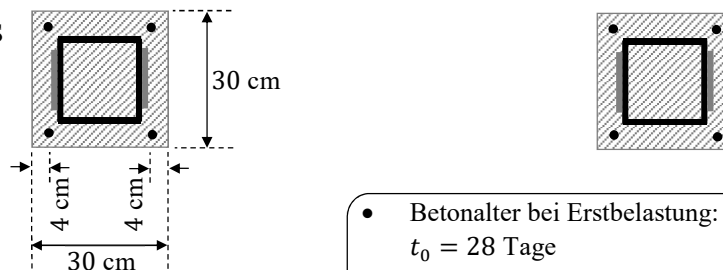
Stahlprofil:

Quadratrohr 200 \times 10, S235

(warmgefertigt),

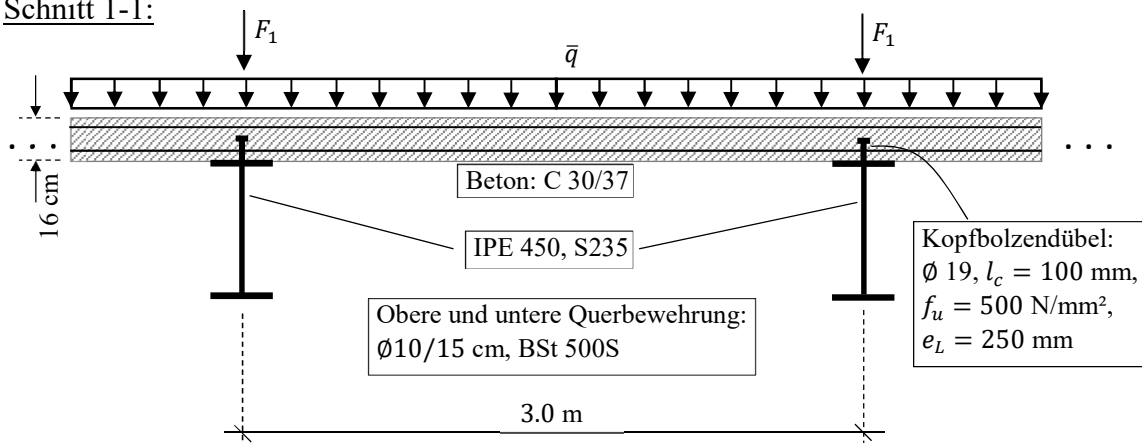
mit Verstärkungsblechen

150 \times 10, S235



- Betonalter bei Erstbelastung:
 $t_0 = 28$ Tage
- Betonalter bei Austrocknungsbeginn:
 $t_s = 3$ Tage
- Zementart: CEM I 42,5 N
- RH: 50 %

Schnitt 1-1:



Gegeben ist das oben dargestellte statische System. Die Stahlträger stehen im Verbund mit der darauf liegenden Betonplatte und spannen als Einfeldträger zwischen zwei unten eingespannten Stützen.

Die Systemgeometrie, Querschnitte, Materialien und Belastung sind der Skizze zu entnehmen. Die angegebenen Lastwerte sind Bemessungswerte. Das Eigengewicht der Stahlträger ist schon durch einen Zuschlag bei der angegebenen Flächenlast berücksichtigt.

Die Herstellung erfolgt im Eigengewichtsverbund. Die Stahlträger sind im Bau- und Endzustand seitlich ausreichend gehalten – d. h. Biegedrillknicken kann ausgeschlossen werden.

Aufgabe 1:

- a) Bestimmen Sie die aufnehmbare Kraft F_1 .

Hinweis zur Weiterrechnung: Unabhängig von Ihrem Ergebnis, rechnen Sie weiter mit $F_1 = 140 \text{ kN}$.

- b) Bestimmen Sie die Durchbiegung in Feldmitte nach Abschluss des Kriechens unter den Lasten \bar{q} und F_1 .

Hinweis: Die Lastwerte sind durch den Faktor 1.4 zu teilen, um die quasi-ständigen Werte zu erhalten.

Aufgabe 2:

Führen Sie den Tragfähigkeitsnachweis einer Verbundstütze für den Zeitpunkt $t \rightarrow \infty$.

Hinweise:

- Nehmen Sie eine Stützenschiefstellung von 1/200 an.
- Der ständige Anteil der Stützendruckkraft ist mit 70 % anzusetzen.
- Ein Ausweichen der Stützen aus der Zeichenebene heraus ist ausgeschlossen.

MUSTERLÖSUNG

Aufgabe 1:

a)

- Mitwirkende Breite:

$$b_{eff} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{2 \cdot 10 \text{ m}}{8} = 2,5 \text{ m} \Rightarrow \text{maßg.} \\ 3 \text{ m} \end{array} \right.$$

- Vollplastisches Moment bei einer Vollverdübelung:

$$N_{pl,c} = h_c \cdot b_{eff} \cdot f_{cd} = 16 \text{ cm} \cdot 250 \text{ cm} \cdot \frac{0,85 \cdot 3 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{1,5} = 6800 \text{ kN}$$

$$N_{pl,a} = 98,8 \text{ cm}^2 \cdot 23,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 2322 \text{ kN} < N_{pl,c}$$

⇒ PNA liegt im Beton.

$$x_1 = \frac{N_{pl,a}}{f_{cd} \cdot b_{eff}} = \frac{2322 \text{ kN}}{1,7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 250 \text{ cm}} = 5,5 \text{ cm}$$

$$M_{pl}(\eta = 1) = N_{pl,a} \cdot \left(\frac{h_a}{2} + h_c - \frac{x_1}{2} \right) = 2322 \text{ kN} \cdot \left(\frac{0,45 \text{ m}}{2} + 0,16 \text{ m} - \frac{0,055}{2} \right) = 830 \text{ kNm}$$

Die Aufnehmbare Kraft in der Verbundfuge durch die Kopfbolzendübel in einer Trägerhälfte:

$$P_{Rd} \cdot \frac{L}{2} = 69,4 \text{ kN} \cdot \frac{500 \text{ cm}}{25 \text{ cm}} = 1388 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow \text{Verdübelungsgrad: } \eta = \frac{1388 \text{ kN}}{N_{pl,a}} = \frac{1388 \text{ kN}}{2322 \text{ kN}} = 0,6$$

- Vereinfachte Berechnung von $M_{pl}(\eta = 0,6)$ durch lineare Interpolation:

$$M_{pl,a} = \frac{1702 \text{ cm}^3 \cdot 23,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{100} = 400 \text{ kNm}$$

$$\begin{aligned} M_{pl}(\eta = 0,6) &= M_{pl,a} + (M_{pl}(\eta = 1) - M_{pl,a}) \cdot 0,6 \\ &= 400 \text{ kNm} + (830 \text{ kNm} - 400 \text{ kNm}) \cdot 0,6 = 658 \text{ kNm} \end{aligned}$$

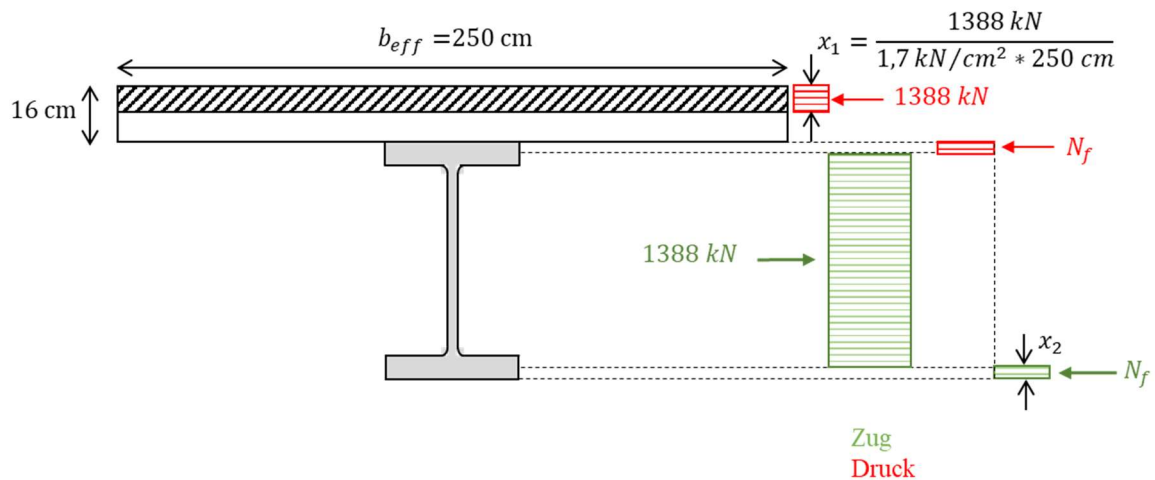
- Genauere Berechnung von $M_{pl}(\eta = 0,6)$:

$$2 N_f = N_{pl,a} - 1388 \text{ kN} = 2322 \text{ kN} - 1388 \text{ kN} = 934 \text{ kN}$$

$$N_f = 467 \text{ kN}$$

Annahme: PNA im Stahl oberflansch:

$$x_2 = \frac{N_f}{b_a \cdot f_{yd}} = \frac{467 \text{ kN}}{19 \text{ cm} \cdot 23,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}} = 1,05 \text{ cm} < t_f = 1,46 \text{ cm} \Rightarrow \text{Annahme ok.}$$



$$\begin{aligned}
 M_{pl}(\eta = 0,6) &= N_c \left(\frac{h_a}{2} + h_c - \frac{x_1}{2} \right) + N_f (h_a - x_2) \\
 &= 1388 \text{ kN} \cdot \left(\frac{0,45 \text{ m}}{2} + 0,16 \text{ m} - \frac{0,0327 \text{ m}}{2} \right) + 476 \text{ kN} \cdot (0,45 \text{ m} - 0,0105 \text{ m}) \\
 &= 717 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

- Aufnehmbare Kraft F_1 :

$$M_{Ed} = \frac{9 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 3 \text{ m} \cdot (10 \text{ m})^2}{8} + \frac{F_1 \cdot 10 \text{ m}}{4} = 337,5 \text{ kNm} + \frac{F_1 \cdot 10 \text{ m}}{4} = M_{pl}(\eta = 0,6)$$

$$\Rightarrow F_1 = (M_{pl}(\eta = 0,6) - 337,5 \text{ kNm}) \cdot \frac{4}{10 \text{ m}}$$

Mit approximiertem $M_{pl}(\eta = 0,6) = 658 \text{ kNm}$:

$$\Rightarrow F_1 = (658 \text{ kNm} - 337,5 \text{ kNm}) \cdot \frac{4}{10 \text{ m}} = 128 \text{ kN}$$

Mit genauerem $M_{pl}(\eta = 0,6) = 717 \text{ kNm}$:

$$\Rightarrow F_1 = (717 \text{ kNm} - 337,5 \text{ kNm}) \cdot \frac{4}{10 \text{ m}} = \mathbf{152 \text{ kN}}$$

- Prüfen, ob M-V-Interaktion in Feldmitte zu berücksichtigen ist:

$$V_{Ed} \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{F_1}{2} = \frac{152 \text{ kN}}{2} = 76 \text{ kN} < 0,5 V_{pl,Rd} = 0,5 \cdot 689 \text{ kN} \Rightarrow \text{keine Interaktion nötig.}$$

\Rightarrow Das Ergebnis für F_1 bleibt gültig.

- Nachweis der Schubtragfähigkeit der Verbundfuge:

- Druckstreben­tragfähigkeit im Schnitt b-b:
(maßgebend gegenüber Schnitt a-a, da $l_{f,a-a} > l_{f,b-b}$)

$$\begin{aligned}
 V_{Rd,max} &= \frac{l_{f,b-b} \cdot \alpha_c \cdot f_{cd}}{\cot \theta + \tan \theta} = \frac{(2 \cdot 10 + 1,5 \cdot 1,9) \cdot 0,75 \cdot \frac{1,7 \text{ kN}}{\text{cm}^2}}{1,2 + \frac{1}{1,2}} \\
 &= 14,3 \frac{\text{kN}}{\text{cm}} < \frac{1388 \text{ kN}}{500 \text{ cm}} = 2,78 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}
 \end{aligned}$$

- Zugstreben­tragfähigkeit im Schnitt b-b:

$$\left(\text{maßgebend gegenüber Schnitt a - a, da } A_o = A_u = 5,24 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}} \right)$$

$$V_{Rd,sy} = 2 \cdot A_u \cdot f_{sd} \cot \theta = 2 \cdot 5,24 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}} \cdot 10^{-2} \cdot 43,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 1,2 = 5,47 \frac{\text{kN}}{\text{cm}} < 2,78 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}$$

⇒ Schubversagen im Beton ist nicht maßgebend. Das Ergebnis für F_1 bleibt gültig.

b) Berechnung der Durchbiegung nach Kriechen

- Relevante Größen:

$$E_{cm} = 3300 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Endkriechzahl:

$$h_0 = h = 16 \text{ cm} \Rightarrow \varphi(\infty, t_0 = 28 \text{ Tage}) = 2,63 - (2,63 - 2,06) \cdot \frac{16-10}{50-1} = 2,54$$

E-Modul für Kriechen:

$$E_p = \frac{E_{cm}}{n_c} = \frac{3300 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{1 + 1,1 \cdot 2,54} = 868 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\text{Mit } n_c = 1 + 1,1 \cdot \varphi(\infty, t_0)$$

$$E_a = 21000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}; A_a = 98,8 \text{ cm}^2; I_a = 33740 \text{ cm}^4$$

$$A_c = 250 \text{ cm} \cdot 16 \text{ cm} = 4000 \text{ cm}^2; I_c = \frac{b_{eff} \cdot h_c^3}{12} = \frac{250 \text{ cm} \cdot 16^3 \text{ cm}}{12} = 85333 \text{ cm}^4$$

$$a = \frac{16 \text{ cm}}{2} + \frac{45 \text{ cm}}{2} = 30,5 \text{ cm}$$

$$EI_p = E_a I_a + E_p I_c + \frac{E_a A_a E_p A_c}{E_a A_a + E_p A_c} \cdot a^2$$

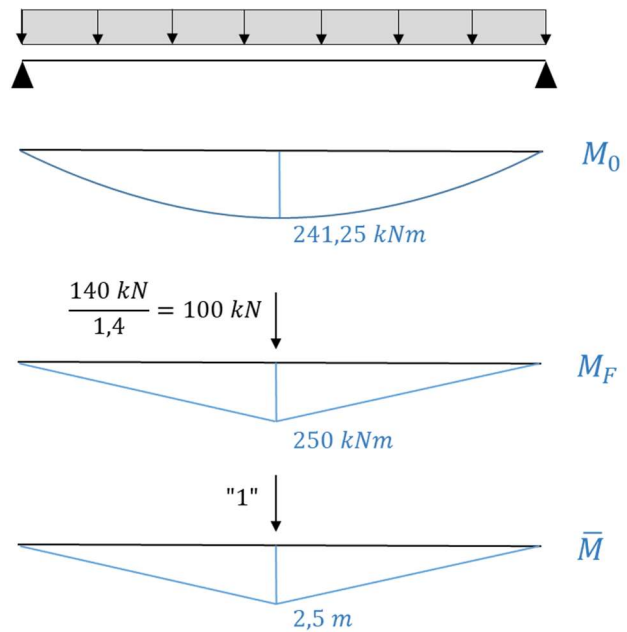
$$\Rightarrow EI_p = \left(21000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 33740 \text{ cm}^4 + 868 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 85333 \text{ cm}^4 + \frac{21000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 98,8 \text{ cm}^2 \cdot 868 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 4000 \text{ cm}^2}{21000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 98,8 \text{ cm}^2 + 868 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 4000 \text{ cm}^2} \cdot (30,5 \text{ cm})^2 \right) \cdot 10^{-4} = \mathbf{199073 \text{ kNm}^2}$$

- Verformung:

$$t = t_{\infty}$$

$$f_{t_{\infty}} = \frac{100 \cdot 10 \text{ m}}{199073 \text{ kNm}^2} \cdot \left(\frac{5}{12} \cdot 2,5 \text{ m} \cdot 241,25 \text{ kNm} + \frac{1}{3} \cdot 2,5 \text{ m} \cdot 250 \text{ kNm} \right)$$

$$= 2,26 \text{ cm}$$



Aufgabe 2:

Tragfähigkeitsnachweis einer Verbundstütze

- Über $M_y - N$ - Interaktionsdiagramm:

Punkt A:

$$\begin{aligned}
 N_{pl,Rd} &= N_{pl,a,Rd} + N_{s,Rd} + N_{c,Rd} = A_a \cdot \frac{f_{yd}}{\gamma_{M1}} + A_s \cdot f_{sd} + A_c \cdot f_{cd} \\
 &= (74,9 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 15 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm}) \cdot \frac{23,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{1,1} + 4 \cdot 3,14 \text{ cm}^2 \cdot 43,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \\
 &\quad + (30^2 \text{ cm} - (74,9 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 15 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm}) - 4 \cdot 3,14 \text{ cm}^2) \cdot 1,7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \\
 &= 2241 \text{ kN} + 546 \text{ kN} + 1330 \text{ kN} = \mathbf{4117 \text{ kN}}
 \end{aligned}$$

$$\frac{N_{pl,a}}{N_{pl,Rd}} = \frac{2241 \text{ kN}}{4117 \text{ kN}} = 0,54 \quad \begin{cases} > 0,2 \\ < 0,9 \end{cases}$$

$$M^A = 0$$

Punkt D:

$$N_a = 0$$

$$M_a = M_{pl,a} = W_{pl,a} \cdot \frac{f_{yd}}{\gamma_{M1}} = 846 \text{ cm}^3 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{23,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{1,1} = 180,7 \text{ kNm}$$

$$N_s = 0$$

$$\begin{aligned}
 M_s &= W_{pl,s} \cdot \frac{f_{sd}}{\gamma_{M1}} = 2 \cdot 3,14 \text{ cm}^2 \cdot (30 \text{ cm} - 4 \text{ cm} - 4 \text{ cm}) \cdot 43,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 10^{-2} \\
 &= 138,16 \text{ cm}^3 \cdot 43,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 10^{-2} = 180,7 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

$$N_c = 0$$

$$\begin{aligned}
 M_c &= W_{pl,c} \cdot \frac{f_{cd}}{2} = \left(\frac{(30 \text{ cm})^2 \cdot 30 \text{ cm}}{4} - 846 \text{ cm}^3 - 138,16 \text{ cm}^3 \right) \cdot \frac{1,7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{2} \cdot 10^{-2} \\
 &= 49 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

$$M^D = M_a + M_s + M_c = 180,7 \text{ kNm} + 180,7 \text{ kNm} + 49 \text{ kNm} = \mathbf{290 \text{ kNm}} = M_{max,Rd}$$

$$N^D = \mathbf{665 \text{ kN}}$$

Punkt B:

Berechnung von x_0 : Annahme: PNA liegt im Steg:

$$x_0 = \frac{\frac{N_{c,Rd}}{2}}{2 \cdot 2 \cdot t_w \cdot f_{yd} + (b_c - 2 \cdot t_w) \cdot f_{cd}}$$

$$= \frac{665 \text{ kN}}{2 \cdot 4 \text{ cm} \cdot \frac{23,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{1,1} + (30 \text{ cm} - 4 \text{ cm}) \cdot 1,7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}} = 3,0 \text{ cm} < \frac{20 \text{ cm} - 2 \text{ cm}}{2} = 9 \text{ cm}$$

⇒ Annahme OK

$$M_0 = x_0^2 \cdot 2t_w \cdot f_{yd} + x_0^2 \cdot (b_c - 2t_w) \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$= \left((3 \text{ cm})^2 \cdot 4 \text{ cm} \cdot \frac{23,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{1,1} + (3 \text{ cm})^2 \cdot 26 \text{ cm} \cdot \frac{1,7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{2} \right) \cdot 10^{-2} = 9,68 \text{ kNm}$$

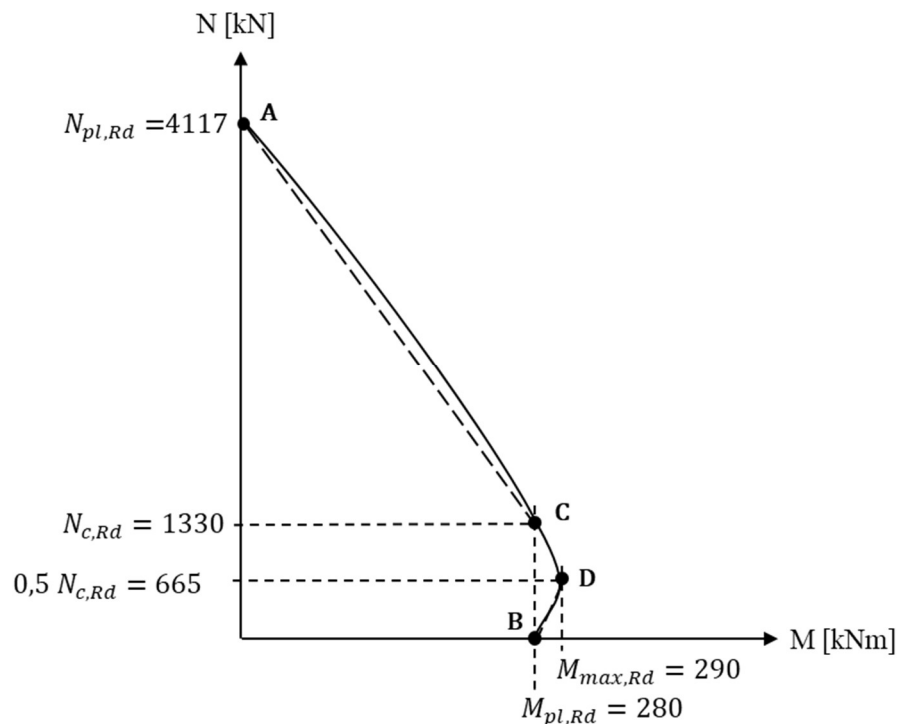
$$M^B = M_{pl,Rd} = 290 \text{ kNm} - 9,68 \text{ kNm} = \mathbf{280 \text{ kNm}}$$

$$N^B = 0$$

Punkt C:

$$M^C = M_{pl,Rd} = \mathbf{280 \text{ kNm}}$$

$$N^C = N_{c,Rd} = \mathbf{1330 \text{ kN}}$$



- Biegesteifigkeit:

$$E_{cm} = 3300 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \text{ (Beton C 30/37)}$$

Endkriechzahl:

$$h_0 = 2 \cdot \frac{A_c}{u} = 2 \cdot \frac{782,54 \text{ cm}^2}{4 \cdot 30 \text{ cm}} = 13 \text{ cm}$$

$$\varphi(\infty, t = 28 T) = 2,59$$

$$E_{c,eff} = E_{cm} \cdot \frac{1}{1 + 0,7 \cdot \varphi} = 3300 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot \frac{1}{1 + 0,7 \cdot 2,59} = 1173 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$(EI)_{eff,y,II} = (E_a I_a + E_s I_s + 0,5 \cdot E_{c,eff} I_c) \cdot 0,9$$

$$= \left(21000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot \left(4471 \text{ cm}^4 + \frac{2 \cdot (1 \text{ cm})^3 \cdot 15 \text{ cm}}{12} + 2 \cdot 15 \text{ cm} \cdot (10,5 \text{ cm})^2 \right) \right. \\ \left. + 20000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 4 \cdot 3,14 \text{ cm}^2 \cdot (11 \text{ cm})^2 + 0,5 \cdot 1173 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot \left(\frac{30^4 \text{ cm}^4}{12} - 1519,8 \text{ cm}^4 - 7781 \text{ cm}^4 \right) \right) \cdot 0,9$$

$$= 2,05 \cdot 10^8 \text{ kNcm}^2$$

Schnittgrößen:

$$N_{Ed} = 9 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} \cdot \frac{10 \text{ m}}{2} + \frac{140 \text{ kN}}{2} + 1500 \text{ kN} = 1705 \text{ kN}$$

$$M_{Ed}^I = \frac{1}{200} \cdot 1705 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} + 15 \text{ kN} \cdot 4 \text{ kNm} = 94,1 \text{ kNm}$$

Einfluss Theorie 2. Ordnung:

$$N_{cr,y} = \frac{\pi^2 (EI)_{eff,y,II}}{L_{cr}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,05 \cdot 10^8 \text{ kNcm}^2}{(2 \cdot 400 \text{ cm})^2} = 3161 \text{ kN}$$

$$\eta_{ki} = \frac{N_{cr}}{N_{Ed}} = \frac{3161 \text{ kN}}{1705 \text{ kN}} = 1,85$$

$$M_{Ed}^{II} = M_{Ed}^I \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\eta_{ki}}} = 94,1 \text{ kNm} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1,85}} = 205,14 \text{ kNm}$$

- Nachweis:

$$M_{pl,N,Rd} = \left(1 - \frac{N_{Ed} - N_{c,Rd}}{N_{pl,Rd} - N_{c,Rd}} \right) \cdot M_{pl,Rd} = \left(1 - \frac{1705 \text{ kN} - 1330 \text{ kN}}{4117 \text{ kN} - 1330 \text{ kN}} \right) \cdot 273,4 \text{ kN} \\ = 236,6 \text{ kNm}$$

$$\frac{M_{Ed}^{II}}{\alpha_M \cdot M_{pl,N,Rd}} = \frac{205,14 \text{ kNm}}{0,9 \cdot 236,6 \text{ kNm}} = 0,96 < 1,0 \Rightarrow \text{Nachweis erfüllt.}$$